$\Rightarrow$ h est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ h réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $h([0;+\infty[)$

Or $h([0;+\infty[) =]\lim_{+\infty} h; h(0)] =]-\infty; 2]$ contient 0

$\Rightarrow$ l'équation $h(x) = 0$ possède une seule solution α dans $\mathbb{R}^+$.

Bilan : l'équation $f(x) = x$ possède une seule solution α dans $\mathbb{R}$.

D'autre part $h(1) \times h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{5}{26}\right) < 0 \Rightarrow 1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

2/ g la restriction de f à $\mathbb{R}^+$

D'où le tableau de variation de g

x	0		$+\infty$
g'(x)	0	−	
g(x)	2	↘	1

a- g est continue st strictement ↘ sur $\mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $g(\mathbb{R}^+) =]1; 2]$

b- $x \in]1; 2]$; $g^{-1}(x) = y \in \mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2+2}{y^2+1} = x \Leftrightarrow y^2 + 2 = xy^2 + x$$

$$\Leftrightarrow (1-x)y^2 = x - 2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x-2}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$$

Or $y \in \mathbb{R}^+$ donc $y = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$

Conclusion : $\forall x \in]1; 2]; g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$.

c- $C_{g^{-1}} = S_\Delta(C_g)$ avec $\Delta : y = x$ (Voir figure)

3/a- Soit ψ une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]; \varphi(x) = \psi(tgx) - \psi(0)$

• la fonction tg est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]; tgx \in [0; 1]$

de plus la fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc, d'après le théorème de la dérivabilité d'une fonction composée, la fonction qui à $x \mapsto \psi(tgx)$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Par suite $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \psi(tgx) - \psi(0)$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.